$$Y^{(i+1)}_{n+1,n+2} - Y^{(i)}_{n+1,n+2}$$
$$= \left[-(I-A) - hB \frac{\partial F}{\partial y}\left(Y^{(i)}_{n+1,n+2}\right)\right]^{-1} (I-A)Y^{(i)}_{n+1,n+2}$$
$$- hBF\left(Y^{(i)}_{n+1,n+2}\right) - \xi_{n+1,n+2} \tag{8}$$

dengan $(I-A) - hB\dfrac{\partial F}{\partial Y}\left(Y^{(i)}_{n+1,n+2}\right)$ adalah Jakobian bagi $\hat{F}$ terhadap y.

Dalam kod yang dibangunkan, langkah gagal digunakan sebagai petunjuk awal bahawa kemungkinan masalah itu adalah masalah kaku. Langkah itu dikatakan gagal mencapai kejituan setempat apabila ralat pangkasan setempat, LTE, berbanding dengan nilai toleransi, TOL, diberikan oleh

$$\text{LTE} > \text{TOL}.$$

Dengan yang demikian, saiz langkah diberikan oleh

$$h_{acc} = \frac{1}{2} \times h_{old}$$

dengan h_{acc} adalah panjang langkah terbesar untuk mencapai kejituan setempat yang diinginkan dan h_{old} adalah panjang langkah daripada blok terdahulu. h_{acc} dengan peringkat k diberikan oleh

$$h_{acc} = c \times h_{old} \times \left(\frac{TOL}{LTE}\right)^{\frac{1}{k}} \tag{9}$$

dengan c adalah faktor keselamatan. Tujuan mempunyai faktor keselamatan c adalah untuk mengelakkan terlalu banyak langkah gagal. Dalam kod yang kami bangunkan, faktor keselamatan adalah 0.5.

Apabila ralat pangkasan setempat, LTE, berbanding dengan nilai toleransi, TOL, memenuhi syarat

$$\text{LTE} < \text{TOL}$$

maka langkah itu dianggap berjaya dan panjang langkah berikutnya ialah $h_{acc} = 2 \times h_{old}$ atau $h_{acc} = h_{old}$.

Hall dan Suleiman [10] memberikan ujian lanjutan yang perlu dilakukan untuk memastikan kekakuan itu benar-benar hadir dalam sistem persamaan itu. Dalam ujian itu, kekakuan dipastikan dengan mencari jumlah nilai eigen, iaitu

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f_i}{\partial y_i} < 0 . \tag{10}$$

Kesemua persamaan dalam sistem PPB dianggap kaku apabila syarat (10) dipenuhi.

MASALAH-MASALAH PENGUJI

Empat masalah berikut digunakan sebagai penguji.

Masalah 1

$y' = -30y$ dengan nilai awal $y(0) = 1$ dalam selang $0 \le x \le 20$.

Nilai eigen: -30.

Penyelesaian analitik: $y(x) = e^{-30x}$.

Masalah 2

$y' = -1000(y-1)$ dengan nilai awal $y(0) = 2$ dalam selang $0 \le x \le 10$.

Nilai eigen: -1000.

Penyelesaian analitik: $y(x) = e^{-1000x} + 1$.

Masalah 3

$$\begin{aligned} y_1' &= -20y_1 - 19y_2 \\ y_2' &= -19y_1 - 20y_2 \end{aligned} \quad \text{dengan nilai awal}$$
$$\begin{aligned} y_1(0) &= 2 \\ y_2(0) &= 0 \end{aligned} \quad \text{dalam selang } 0 \le x \le 20 .$$

Nilai eigen : -1 dan -39

Penyelesaian analitik: $\begin{aligned} y_1(x) &= e^{-39x} + e^{-x} \\ y_2(x) &= e^{-39x} - e^{-x} \end{aligned}$.

Masalah 4

$$\begin{aligned} y_1' &= 998y_1 + 1998y_2 \\ y_2' &= -999y_1 - 1999y_2 \end{aligned} \quad \text{dengan nilai awal}$$
$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= 1 \end{aligned} \quad \text{dalam selang } 0 \le x \le 20 .$$

Nilai eigen : -1 dan -1000.

Penyelesaian analitik:

$$y_1(x) = 4e^{-x} - 3e^{-1000x}$$
$$y_2(x) = -2e^{-x} + 3e^{-1000x}$$

Masalah-masalah yang dipertimbangkan adalah persamaan pembezaan kaku dengan nilai eigen yang berbeza.

Jadual 1. Keputusan berangka

MASALAH	TOL	KAEDAH	IST	IFST	STPS	RALAT	MASA
1.	10^{-2}	VSVO PABDF	27 24	4 5	31 29	2.1844e-002 1.1624e-003	12518 6278
	10^{-4}	VSVO PABDF	41 40	4 5	45 45	2.5063e-004 1.1156e-005	12277 7125
	10^{-6}	VSVO PABDF	59 75	2 2	61 77	1.8449e-006 2.1265e-008	14131 9765
2.	10^{-2}	VSVO PABDF	44 28	7 5	51 33	4.5558e-002 1.9381e-003	12939 6866
	10^{-4}	VSVO PABDF	46 40	4 6	50 46	6.9754e-004 2.3639e-006	12866 7645
	10^{-6}	VSVO PABDF	64 71	5 2	69 73	5.5160e-006 2.3247e-008	13176 9328
3.	10^{-2}	VSVO PABDF	39 29	2 5	41 34	3.0413e-002 2.0357e-003	15298 10658
	10^{-4}	VSVO PABDF	59 52	6 5	65 57	3.7541e-004 2.8676e-006	18224 14902
	10^{-6}	VSVO PABDF	141 120	23 5	164 125	5.2444e-006 3.1626e-008	26433 24792
4.	10^{-2}	VSVO PABDF	57 35	18 4	75 39	7.6535e-001 6.6468e-003	18256 11133
	10^{-4}	VSVO PABDF	93 61	15 2	108 63	3.3270e-003 2.7339e-006	21712 15393
	10^{-6}	VSVO PABDF	- 160	- 2	- 162	- 1.8937e-008	- 29305

Malaysian Journal of Science **26** (SKSM14 Special Issue): 17 - 22 (2007)

KEPUTUSAN BERANGKA

Rumus Blok Adams dan kaedah blok FBB yang diberi dalam bahagian kedua telah digunakan bagi menyelesaikan masalah yang diberikan dalam seksyen masalah penguji. Keputusan berangkanya dibandingkan dengan keputusan berangka yang diperolehi apabila masalah tersebut diselesaikan dengan kaedah pemetakan bukan blok panjang langkah berubah dan peringkat berubah Adams dan FBB. Keputusan bagi kedua dua kaedah ini adalah seperti dalam Jadual 1. Parameter yang diukur dalam Jadual 1 adalah seperti berikut:

STPS	:	bilangan langkah
TOL	:	nilai toleransi $10^{-2}, 10^{-4}$ dan 10^{-6}
IFST	:	Bilangan langkah gagal disebabkan taktumpuan lelaran atau kawalan ralat setempat
IST	:	bilangan langkah berjaya
RALAT	:	ralat maksima
VSVO	:	implementasi kaedah pemetakan bukan blok panjang langkah berubah dan peringkat berubah Adams dan FBB
PABDF	:	implementasi kaedah pemetakan blok tersirat Adams dan FBB
MASA	:	masa pelaksanaan (mikrosaat)

Keputusan yang diperoleh dilaksanakan atas mesin Sequent S30 dengan DYNIX/ptx V4.4.5 sebagai sistem pengoperasian.

KESIMPULAN

Jadual 1 menunjukkan keputusan yang didapati dengan kaedah pemetakan dalam blok adalah lebih baik daripada keputusan yang didapati daripada kaedah pemetakan bukan blok berasaskan bilangan langkah yang diperlukan, kejituan dan masa pelaksanaan. Kaedah pemetakan dalam blok mengurangkan bilangan langkah dengan kejituan yang lebih baik dan masa pelaksanaan adalah lebih cepat.

Secara keseluruhannya, boleh disimpulkan bahawa kod penyelesaian yang lebih efisien adalah berdasarkan kaedah pemetakan automatik blok Adams tersirat dan Formulasi Beza ke Belakang.

RUJUKAN

1. Bjork, A. (1983). A block QR algorithm for partitioning stiff differential systems. *BIT* 23: 329-345.
2. Enright, W.H. and Kamel, M.S. (1979). Automatic Partitioning of Stiff Systems and Exploiting the Resulting Structure. *ACM Trans. Math. Softw.* **5** (4): 374-385.
3. Watkins, D.S. and Hansonsmith, R.W. (1983). The numerical solution of separably stiff systems by precise partitioning. *ACM Transactions on Mathematical Software* **9** (3): 293-301.
4. Palunski, O.A. and Wait, J.V. (1978). *Numerical techniques for partitioned dynamic system simulation.* Proceedings of the Summer Computer Simulation Conference, Los Angeles, California.
5. Soderlind, G. (1980). DASP3-A Program for the Numerical Integration of Partitioned Stiff ODEs and Differential-Algebraic Systems. *Rpt TRITA-NA-8008, Report TRITNA-NA7910*, Royal Institute of Technology, Stockholm.
6. Carver, M.B. and MacEwen, S.R. (1982). *Automatic partitioning in ordinary differential equation integration. Progress in Modelling and Simulation.* Academic Press. London.
7. Suleiman, M.B. and Baok, S. (1992). Using nonconvergence of iteration to partition ODEs. *Applied Math and Computation* **49**: 111-139.
8. Majid, Z. (2004). *Parallel Block Methods For Solving Ordinary Differential Equations*, PhD Thesis, Universiti Putra Malaysia.
9. Zarina Bibi, I., Khairil Iskandar, O.,Suleiman, M., (2005). Derivation of Variable Step Size 2-Point Fully Implicit Backward Differentiation Formulae. *Proceedings of The 2nd International Conference on Research and Education in Mathematics (ICREM2), Malaysia* ,UPM: 235-242.
10. Hall, G. and Suleiman, M.B. (1985). A single code for the solution of stiff and nonstiff ODEs. *SIAM J. Stat. Computing* **6**(3): 684-697.