

## PENAAKULAN PERKADARAN MURID TAHUN LIMA: STRATEGI PENYELESAIAN MASALAH MISSING-VALUE

Fazura Mohd Noor  
Sharifah Norul Akmar Syed Zamri (PhD)  
Leong Kwan Eu (PhD)

Fakulti Pendidikan, Universiti Malaya  
Kuala Lumpur  
*cikgufazu@gmail.com*

**Abstract:** The purpose of this study was to identify primary school pupils' strategies while solving two types of problems related to proportion: missing-value problems and ratio comparison problems. This qualitative case study involved Year Five students (aged 11) who were selected through purposive sampling. Data collected using clinical interview technique can show the pupils' strategies and in-depth justification for each activity shown. This article only presents the analysis of two pupils' responses related to two missing-value tasks. The findings show that students do not just rely on one strategy, but switch to using a combination of strategies or concepts that are better suited to solve the problem of missing-value. The implications of the findings were also discussed.

**Keywords:** Proportional reasoning, missing-value problems, strategies

### PENGENALAN

Penaakulan perkadaran adalah sukar untuk diterangkan secara ringkas kerana ia bukanlah semata-mata melibatkan sama ada individu boleh atau tidak boleh menyelesaikan sesuatu masalah. Lobato dan Ellis (2010) menyatakan intipati bagi penaaakulan perkadaran adalah apabila individu mempertimbangkan sesuatu kuantiti dari aspek hubungan relatif dan bukannya secara mutlak serta perubahan individu daripada menaakul secara menambah kepada menaakul secara mendarab.

Penaakulan perkadaran yang menggunakan konsep nisbah dan kadaran bukan sahaja dianggap sebagai penghubung antara nombor, aritmetik, algebra, dan matematik lanjutan (Abrahamson, 2005; Fuson & Lamon, 2007; Lesh, Post, & Behr, 1988), malah penaaakulan perkadaran dalam topik nisbah dan kadaran turut diajar secara formal bermula dari gred lima hingga gred lapan (National Council of Teaching of Mathematics, 2000). Maka penaaakulan perkadaran dalam masalah nisbah dan kadaran adalah satu konsep yang penting dan berfungsi sebagai asas di peringkat sekolah rendah dan menengah serta merupakan prasyarat untuk peringkat yang lebih tinggi (Post, Behr, & Lesh, 1988).

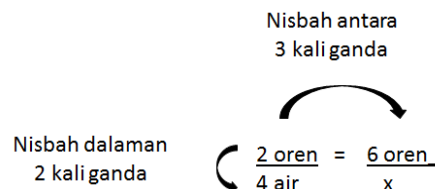
Kajian lepas telah membahagikan tiga jenis masalah yang kerap digunakan untuk mengenal pasti bagaimana murid menaakul dalam nisbah dan kadar, iaitu masalah *missing-value*, masalah perbandingan berangka, dan masalah ramalan kualitatif dan perbandingan (Ben-Chaim, Fey, Fitzgerald, Benedetto, & Miller, 1998; Heller, Post, Behr, & Lesh, 1990). Masalah *missing-value* melibatkan tiga kuantiti yang dinyatakan dan satu kuantiti yang tidak diketahui (Ben-Chaim et al., 1998; Cramer & Post, 1993; Heller et al., 1990). Asas bagi pemahaman dalam masalah *missing-value* adalah perwakilan nisbah setara. Maka untuk mengetahui struktur hubungan antara kuantiti yang berkadaran dan mewakili hubungan tersebut sebagai dua nisbah yang setara, murid perlu tahu menyusun ketiga-tiga kuantiti yang diberi dalam bentuk  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  (Cramer & Post, 1993). Walau bagaimanapun, Lamon (2006) berpendapat murid tidak sepatutnya diajar menyelesaikan masalah dengan meletakkan tiga daripada empat kuantiti ke dalam persamaan  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  dan kemudian melakukan operasi darab silang dan pembahagian kerana kaedah tersebut langsung tidak menggalakkan penaaakulan perkadaran. Dalam nada yang sama, Lesh, Post, dan Behr (1988) turut menyatakan bahawa masalah *missing-value* yang digunakan dalam kajian penaaakulan perkadaran tidak berkait dengan algoritma pendaraban silang kerana fokus utama adalah murid dapat memahami konteks masalah yang berkaitan dengan kadaran.

Beberapa kajian lepas telah menganalisis dan mengkategorikan penaaakulan perkadaran dalam menyelesaikan masalah nisbah dan kadaran berdasarkan pelbagai strategi yang ditunjukkan oleh murid. Bagi mengenal pasti pemahaman penaaakulan perkadaran, strategi penyelesaian murid dalam nisbah dan kadaran telah dikategorikan dalam tiga tahap penaaakulan, iaitu secara kualitatif, penambahan, dan pendaraban (Behr, Harel, Post, & Lesh, 1992; Resnick & Singer, 1993).

*Kualitatif.* Dalam penaakulan secara kualitatif, murid cenderung menggunakan pengetahuan informal atau menghubungkan pengetahuan intuitif tanpa melibatkan pengiraan berangka (Kieren, 1993). Strategi ini boleh dikenal pasti melalui penggunaan perkataan perbandingan seperti lebih banyak atau lebih sedikit, besar atau kecil, dan bertambah atau berkurang untuk mengaitkan kuantiti dalam soalan yang diberi (Freudenthal, 1983).

*Penambahan.* Strategi menaakul secara penambahan yang juga dikenali sebagai strategi *build-up* atau strategi mengenal pasti pola merupakan strategi yang dominan dalam kalangan murid sekolah rendah dan menengah (Kaput & West, 1994; Tourniaire & Pulos, 1985). Walaupun strategi *build-up* merupakan permulaan bagi penaakulan perkadaran, namun Resnick dan Singer (1993) mengingatkan bahawa strategi ini hanya membolehkan murid menyelesaikan masalah tanpa mengenal pasti hubungan pendaraban yang wujud dalam kadaran. Maka penaakulan yang berdasarkan strategi penambahan sering dirujuk sebagai *protoratio* (Resnick & Singer, 1993) atau pra-perkadaran (Kaput & West, 1994).

*Hubungan pendaraban.* Penaakulan perkadaran adalah berkaitan dengan hubungan pendaraban, oleh itu peralihan daripada strategi *build-up* kepada strategi pendaraban dianggap sebagai tanda aras dalam menentukan perkembangan penaakulan perkadaran individu (Karplus et al., 1983; Lamon, 2006; Lobato & Ellis, 2010). Dua jenis strategi pendaraban yang dikenal pasti apabila menyelesaikan masalah kadaran, iaitu strategi *nisbah dalaman* dan *nisbah antara* (Karplus et al., 1983; Noelting, 1980; Vergnaud, 1994). Strategi *nisbah dalaman* adalah berdasarkan bagaimana hubungan pendaraban diaplikasikan dalam satu nisbah kepada nisbah yang kedua untuk menghasilkan nisbah yang setara, manakala strategi *nisbah antara* pula adalah menentukan hubungan pendaraban antara bahagian yang sepadan bagi dua nisbah untuk menghasilkan nisbah yang setara seperti ditunjukkan dalam Rajah 1.



Rajah 1. Strategi nisbah dalaman dan nisbah antara.

Lamon (1994) melihat dari sudut yang berbeza bagaimana murid menaakul secara perkadaran. Menurut beliau, dua proses yang menjadi tunjang utama dalam memahami penaakulan perkadaran adalah *unitizing* dan *norming*. *Unitizing* melibatkan murid membina unit rujukan berdasarkan hubungan nisbah yang diberi atau dengan kata lain mereka berkeupayaan untuk memahami satu kumpulan kuantiti sebagai unit (Lamon, 1994). Manakala *norming* pula merujuk kepada bagaimana murid mentafsir semula nisbah lain berdasarkan unit rujukan (Lamon, 1994). Selain strategi yang dinyatakan, satu lagi strategi penaakulan perkadaran yang sering digunakan oleh murid adalah strategi kadar unit, iaitu mencari kadar bagi satu unit dulu dan kemudian mendarab kadar unit tersebut sehingga menghasilkan jawapan yang dikehendaki (Bart, Post, Behr & Lesh, 1994).

Secara ringkasnya dapat disimpulkan bahawa murid mempunyai cara yang berbeza untuk menaakul secara perkadaran bergantung kepada pengetahuan sedia ada dan pengalaman. Keupayaan murid untuk mempertimbangkan pelbagai strategi menggambarkan fleksibiliti pemikiran berkaitan dengan penaakulan perkadaran. Dalam konteks Malaysia, oleh kerana topik nisbah dan kadaran diperkenalkan di sekolah rendah bermula tahun 2014 bagi murid Tahun Empat, maka adalah perlu untuk mengenal pasti sejauh manakah strategi penaakulan perkadaran murid sekolah rendah dalam topik nisbah dan kadaran. Adakah strategi penaakulan perkadaran yang digunakan hanya terbatas kepada standard pembelajaran yang dikemukakan dalam kurikulum matematik sekolah rendah (Kementerian Pendidikan Malaysia, 2013), iaitu menentukan satu nilai (*missing-value*) dengan menggunakan kaedah unitari dalam situasi harian? Maka kajian ini bertujuan untuk mengenal pasti strategi penaakulan perkadaran yang digunakan oleh murid sekolah rendah semasa menyelesaikan masalah berkaitan perkadaran, iaitu masalah *missing-value*.

## METODOLOGI

Kajian ini menggunakan kajian kes sebagai reka bentuk kajian. Menurut Creswell (2012), kajian kes kualitatif merupakan satu reka bentuk yang membabitkan pengkaji meneroka sesuatu kes melalui pengumpulan data secara terperinci. Oleh kerana reka bentuk kajian ini melibatkan pengkaji secara langsung dalam pengumpulan dan analisis data, maka ianya dapat menyediakan peluang untuk mendapatkan gambaran yang lebih mendalam tentang aktiviti dan justifikasi peserta kajian (Merriam, 2009).

Murid Tahun Lima Sekolah Rendah (SR) di Wilayah Persekutuan Kuala Lumpur dipilih sebagai peserta kajian menggunakan teknik pensampelan bertujuan. Oleh kerana kajian ini masih di peringkat preliminari, maka artikel ini hanya melaporkan respons bagi dua peserta kajian. Menurut Merriam (2009), kaedah pensampelan bertujuan adalah berdasarkan andaian bahawa pengkaji ingin mengetahui, memahami, dan mendapatkan maklumat, maka pengkaji haruslah memilih peserta kajian dan lokasi yang menepati kriteria kajian, iaitu *kaya maklumat*; ini bermakna peserta kajian dan lokasi yang membekalkan maklumat yang berguna bagi menjawab soalan kajian. Data kajian ini dikumpul melalui teknik temu bual klinikal yang merangkumi maklumat lisan dan maklumat bukan lisan. Maklumat lisan adalah apa sahaja yang dituturkan oleh peserta kajian sepanjang sesi temu bual berlangsung. Manakala maklumat bukan lisan merujuk kepada lukisan atau lakaran peserta kajian, catatan penemu bual, catatan peserta kajian, dan tingkah laku peserta kajian.

Kajian ini menggunakan analisis protokol bertulis yang melibatkan empat peringkat utama dalam menganalisis data. Pada peringkat pertama, rakaman video dan audio ditranskripsi dalam bentuk bertulis. Peringkat seterusnya melibatkan data mentah yang telah ditranskripsi dibaca berulang kali bagi memahami strategi penaakulan perkadaran peserta kajian. Di peringkat ini juga pengkaji melaksanakan prosedur pengekodan transkrip sebanyak dua kali seperti yang dicadangkan oleh Miles dan Huberman (1994). Pada peringkat ketiga analisis bagi setiap kes (peserta kajian) dibentuk berdasarkan respons daripada protokol bertulis. Pengkaji seterusnya melakukan analisis merentas kes bagi merumuskan strategi penaakulan perkadaran peserta kajian semasa menyelesaikan masalah *missing-value*.

Tugas temu bual kajian ini terdiri daripada soalan jenis terbuka (*open-ended*) yang membolehkan peserta kajian menyumbang sebanyak mungkin maklumat dan membolehkan pengkaji menggunakan teknik *probing* untuk soalan susulan (Gall, Gall, & Borg, 2003). Kajian ini menggunakan masalah perkadaran berkaitan *missing-value* (MV). Dalam setiap tugas *missing-value*, tiga kuantiti daripada dua nisbah diberi dan peserta kajian dikehendaki menentukan kuantiti keempat yang menunjukkan kadaran. Kedua-dua konteks masalah *missing-value* melibatkan konteks masalah kadar, iaitu harga pensil dan harga belon dimodifikasi daripada Christou dan Philippou (2002) seperti dalam Jadual 1.

Jadual 1

*Tugas Missing-value*

Tugas	Soalan
MV2.1: Harga pensil	Yusuf membayar RM3 untuk membeli 12 pensil. Berapa wang yang perlu dibayar oleh Yusuf jika dia ingin membeli 48 pensil?
MV3.1: Harga belon	Laila membeli 3 belon dengan harga RM2. Nisa pula membeli 9 belon dari kedai yang sama. Berapa harga belon yang Nisa perlu bayar?

Melalui kedua-dua tugas *missing-value* ini, pengkaji bukan sahaja mengetahui strategi digunakan peserta kajian dalam menyelesaikan masalah, malah justifikasi ke atas pemilihan strategi yang digunakan mereka.

**DAPATAN DAN PERBINCANGAN KAJIAN**

Analisis hasil kajian menunjukkan strategi yang berbeza digunakan oleh peserta kajian. Berikut merupakan analisis hasil kajian yang membabitkan dua peserta kajian ini, iaitu Sofia dan Zara dalam menyelesaikan dua masalah *missing-value*.

*Strategi penyelesaian masalah Sofia*

Semasa menyelesaikan masalah MV2.1, Sofia pada mulanya hanya membuat penaakulan secara kualitatif dengan mengemukakan secara lisan pernyataan “lagi banyak pensil mestilah lagi mahal harga pensil”. Pernyataan yang dibuat oleh Sofia adalah bersifat intuitif yang dibina berdasarkan pengalaman dan beliau tidak dapat mengenal pasti hubungan antara dua kuantiti (bilangan pensil dan harga pensil). Apabila diminta menunjukkan cara menyelesaikan masalah MV2.1, Sofia melakukan pengiraan seperti Rajah 2.

Rajah 2. Strategi penyelesaian Sofia bagi tugas MV2.1

Sofia cuba menyelesaikan masalah MV2.1 dengan menambah 12 beberapa kali. Setiap kali menambah 12, beliau akan menulis 3 di sebelah nombor 12, 24, 36, dan 48. Sebagai penjelasan, sedutan petikan yang berikut memaparkan cara penyelesaian Sofia. Dalam petikan ini dan petikan seterusnya, P adalah singkatan bagi pengkaji dan S adalah singkatan bagi peserta kajian kajian.

- P: Boleh jelaskan mengapa kamu tulis 3 di tepi ini?  
 S: Sebab saya tahu 12 pensil RM3. Jadi setiap kali tambah 12 saya kena tambah RM3.  
 P: Selepas itu kamu buat apa?  
 S: Saya kira ada empat '3'. Saya tambahkan empat kali dapat RM12.

Pernyataan "12 pensil RM3" yang dikemukakan oleh Sofia menunjukkan beliau menggunakan konsep *unitizing*, yang mana 12 kepada 3 (12:3) dianggap sebagai nisbah unit. Sofia kemudian menggunakan strategi *build-up* dengan menambah 12 secara berulang sehingga memperoleh 48. Seterusnya beliau menggunakan pola yang sama untuk menambah nombor 3 sebanyak empat kali menghasilkan 12. Walaupun Sofia memperoleh jawapan yang tepat, namun strategi yang dipamerkan tidak menggambarkan penaakulan perbandingan. Ini kerana Sofia tidak dapat mengenal pasti hubungan pendaraban antara dua kuantiti nisbah yang saling berkait, sebaliknya menaakul secara penambahan.

Bagi tugas MV3.1 pula, pada mulanya Sofia menggunakan strategi kadar unit dengan membahagikan 2 dengan 3, namun beliau kelihatan keliru memandangkan hasil bahagi yang diperolehi mempunyai baki yang berulang (0.6667). Pengkaji dengan sengaja memodifikasi tugas MV3.1 untuk melihat strategi yang ditunjukkan murid selain daripada strategi kadar unit. Ini kerana, walaupun strategi kadar unit merupakan strategi yang paling kerap digunakan murid (Cramer & Post, 1993), namun masalah *missing-value* yang melibatkan bukan nombor bulat, seperti 0.6667 dianggap sesuatu yang sukar bagi murid. Selepas berdiam agak lama, Sofia menyatakan cara yang ditunjukkan (bahagi 2 dengan 3) tidak boleh digunakan dengan alasan hasil bahagi mempunyai baki yang berulang dan menyebabkan beliau tidak memperoleh harga bagi satu belon. Beliau kemudian mencuba satu lagi strategi untuk menyelesaikan tugas yang sama.

- P: Apa yang kamu fikirkan sekarang?  
 S: Saya sedang fikir cara lain nak buat. 3 darab 3 dapat 9. Jadi RM2 darab 3 dapat RM6.

Petikan ini menunjukkan Sofia dapat mengenal pasti *hubungan nisbah antara* untuk kedua-dua nisbah ( $\frac{3}{RM2} = \frac{9}{x}$ ), dan menggunakan hubungan pendaraban untuk mencari anu dalam nisbah yang kedua. Strategi yang ditunjukkan Sofia menggambarkan beliau bukan hanya melakukan pendaraban, malah dapat memberi justifikasi yang menggambarkan pemahaman beliau tentang hubungan antara dua kuantiti dalam nisbah. Menurut Sofia, oleh kerana 3 belon perlu didarab dengan 3 untuk menghasilkan 9 belon, maka beliau mengaplikasi hubungan tersebut dengan mendarab RM2 dengan 3 untuk mendapatkan nisbah yang setara. Strategi yang dipamerkan Sofia dalam tugas MV3.1 berbeza dengan strategi yang digunakan bagi tugas MV2.1. Dalam tugas MV3.1, strategi yang digunakan memaparkan kebolehan penaakulan perbandingan Sofia.

#### Strategi penyelesaian masalah Zara

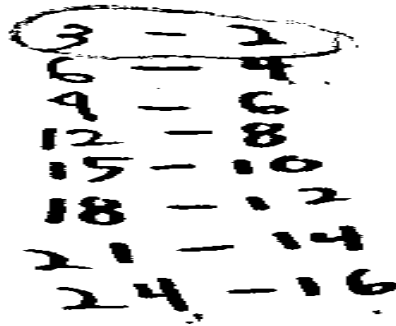
Semasa menyelesaikan tugas MV2.1, Zara memulakan dengan membahagi 3 dengan 12 dan memperoleh 0.25. Beliau kemudian mendarab 0.25 dengan 48 menghasilkan RM12. Cara penyelesaian Zara jelas menunjukkan beliau menggunakan strategi kadar unit untuk menentukan harga satu belon sebelum mencari harga bagi 48 belon. Apabila

ditanya bolehkah beliau menyelesaikan tugas MV2.1 menggunakan selain cara yang ditunjukkan, beliau menjelaskan seperti berikut:

- S: (Diam seketika). Kalau nak jawapan cepat kita boleh gandakan saja.  
 P: Apa maksud kamu “gandakan”?  
 S: 12 dapat 3, gandakan 12 dapat 24, gandakan 3 dapat 6. Ganda sekali lagi, 24 dapat 48 dan 6 dapat 12. Jadi jawapan sama RM12 dengan lagi cepat.

Selain strategi kadar unit, Zara juga mempamerkan satu lagi strategi, iaitu mengenal pasti pola gandaan. Strategi ini adalah sama dengan strategi *build-up* walaupun beliau tidak menunjukkan langkah penambahan tetapi menggunakan jari untuk menggandakan nisbah 12 kepada 3 sehingga mencapai nisbah yang diinginkan. Pernyataan “12 dapat 3” jelas menggambarkan Zara menggunakan konsep *unitizing* dan mengulang unit komposit secara gandaan.

Seterusnya bagi tugas MV3.1 pula, Zara sekali lagi menggunakan konsep *unitizing* dengan menginterpretasi  $\frac{3}{2}$  (3 kepada 2) sebagai unit komposit seperti dalam Rajah 3. Beliau kemudian membuat pengulangan bagi unit komposit sehingga mencapai nisbah yang dikehendaki, iaitu 24 kepada 16 (24:16). Walaupun Zara menggunakan konsep *unitizing*, namun beliau tidak melibatkan hubungan pendaraban seperti yang dilakukan oleh Sofia; sebaliknya dia hanya melakukan pengulangan unit nisbah secara strategi *build-up* yang mana tidak menggambarkan penaakulan perkadaran.



Rajah 3. Strategi penyelesaian Zara bagi tugas MV3.1

Secara ringkasnya, strategi yang ditunjukkan oleh kedua-dua peserta kajian dapat diperhatikan dalam Jadual 2. Dapatan menunjukkan peserta kajian tidak hanya bergantung kepada satu strategi untuk menyelesaikan masalah *missing-value*, malah menggabungkan konsep dan strategi.

Jadual 2

*Strategi Penyelesaian Masalah Missing-value*

Tugas <i>missing-value</i>	Strategi penyelesaian masalah	
	Sofia	Zara
MV2.1	<ul style="list-style-type: none"> <li>Perbandingan secara lisan</li> <li>Kombinasi konsep <i>unitizing</i> dan strategi <i>build-up</i> secara menambah</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Strategi kadar unit</li> <li>Kombinasi konsep <i>unitizing</i> dan strategi <i>build-up</i> secara gandaan</li> </ul>
MV3.1	<ul style="list-style-type: none"> <li>Strategi kadar unit</li> <li>Kenal pasti hubungan nisbah antara</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Kombinasi konsep <i>unitizing</i> dan strategi <i>build-up</i> secara menambah</li> </ul>

Berdasarkan strategi penyelesaian yang ditunjukkan, kedua-dua peserta kajian memaparkan penaakulan perkadaran yang berbeza. Strategi penyelesaian Sofia bagi tugas MV2.1 jelas menggambarkan beliau hanya menaakul secara kualitatif dan secara penambahan. Bagi tugas MV3.1, Sofia dikategorikan menaakul secara perkadaran kerana berkeupayaan mengenal pasti hubungan relatif antara dua nisbah. Sebaliknya, strategi penyelesaian tugas MV2.1 dan MV3.1 oleh Zara menunjukkan beliau hanya menaakul secara penambahan.

## IMPLIKASI DAN CADANGAN

Dapatan kajian menunjukkan bahawa murid seawal usia 11 tahun boleh mempamerkan pelbagai strategi penyelesaian masalah *missing-value* yang boleh menggambarkan penaakulan perkadaran mereka. Terdapat dua

implikasi penting daripada dapatan kajian ini terhadap guru sekolah rendah. Pertama, guru boleh menggunakan maklumat kajian, seperti strategi yang ditunjukkan murid untuk menyediakan aktiviti atau tugas berkaitan nisbah dan kadaran yang bersesuaian mengikut kebolehan murid. Ini kerana aktiviti dan tugas yang sesuai dapat memaparkan cara murid berfikir secara optimum dan pemahaman konsep matematik yang dimiliki murid. Kedua, guru tidak seharusnya bergantung semata-mata kepada soalan dalam buku teks yang menekankan kaedah pendaraban silang kerana ini menyebabkan murid menghafal algoritma atau prosedur tertentu semasa menyelesaikan masalah *missing-value* tanpa memberi sebarang justifikasi. Maka guru perlu mempelbagaikan teknik penyoalan untuk mengetahui kebolehan penaakulan murid. Adalah penting bagi guru untuk mengetahui bagaimana murid boleh menjelaskan alasan bagi setiap aktiviti matematik kerana ini menunjukkan idea murid terhadap diri mereka, rakan, dan guru dan murid bukan hanya sekadar mengingat prosedur bagi masalah tertentu tanpa makna.

## RUJUKAN

- Bart, W., Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1994). A diagnostic analysis of a proportional reasoning test item: An introduction to the properties of a semi-dense item. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 16(3), 1-11.
- Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational Number, Ratio, and Proportion. Dalam D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (hh. 296–333). New York, NY: Macmillan.
- Ben-Chaim, D., Fey, J. T., Fitzgerald, W. M., Benedetto, C., & Miller, J. (1998). Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experiences. *Educational Studies in Mathematics*, 36, 247-273.
- Christou, C., & Philippou, G. (2002). Mapping and development of intuitive proportional thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 321-336.
- Cramer, K., & Post, T. (1993). Connecting research to teaching proportional reasoning. *Mathematics Teacher*, 86(5), 404- 407.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures* (hh. 178–209). Dordrecht: Reidel.
- Fuson, K. C., & Abrahamson, D. (2005). Understanding ratio and proportion as an example of the apprehending zone and conceptual-phase problem-solving models. Dlm. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (hh. 213–234). New York, NY: Psychology Press.
- Gall, M. D., Gall, J. P., & Borg, W. R. (2003). *Educational research: An introduction* (7th ed.). Boston, MA: A & B Publications.
- Heller, P. M., Post, T. R., Behr, M., & Lesh, R. (1990). Qualitative and numerical reasoning about fractions and rates by seventh- and eighth-grade students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(5), 388-402.
- Kaput, J. J., & West, M. M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. Dalam G. Harel & J. Confrey (Sid. Ed.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (hh. 235-287). Albany, NY: State University of New York Press.
- Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. Dalam R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (hh. 45-90). New York, NY: Academic Press.
- Kementerian Pendidikan Malaysia. (2013). *Draf Kurikulum Standard Sekolah Rendah: Dokumen Standard Kurikulum dan Pentaksiran Matematik Tahun Empat*. Kuala Lumpur: Bahagian Pembangunan Kurikulum.
- Kieren, T. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. Dalam T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Sid. Ed.), *Rational numbers: An integration of research*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. Dalam J. Confrey (Ed.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (hh. 89-120). Albany, NY: Sate University of New York Press.
- Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional*



- strategies for teachers* (2nd ed.). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. Dalam F. K. Lester (Ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Jil. 1, hh. 629-668). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. Dalam J. Hiebert & M. Behr (Sid. Ed.), *Number concepts and operations in the middle grades* (hh. 93-118). Reston, VA: Erlbaum & NCTM.
- Lobato, J., & Ellis, A. B. (2010). *Developing essential understanding of ratios, proportions & proportional reasoning: Grade 6-8*. Reston, VA: NCTM.
- Merriam, S. B. (2009). *Qualitative research: A guide to design and implementation*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- National Council of Teachers of Mathematics. (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part 1 – Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 217-253.
- Post, T. R., Behr, M. J., & Lesh, R. (1988). Proportionality and the development of pre-algebra understandings. Dalam A. F. Coxford & A. P. Shulte (Sid. Ed.), *The ideas of algebra, K-12* (hh. 78-90). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Resnick, L., & Singer, J. (1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. Dalam T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Sid. Ed.), *Rational numbers: An integration of research* (hh. 107-130). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 181-204.
- Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? Dalam G. Harel & J. Confrey (Sid. Ed.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (hh. 41–59). Albany, NY: State University of New York Press.